

Ciencia, Humanismo y Sociedad

Seminarios sobre Ciencia

Las múltiples facetas de una constante universal: h

La "acción" cuantificada
El ónfalo del Universo

ATENEIO de Badajoz

Francisco J. Olivares del Valle

Jueves, 24 de Octubre de 2024

19:30 h

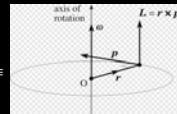


El **MOMENTO ANGULAR** o **MOMENTO CINÉTICO** es una magnitud física, equivalente rotacional del **momento lineal** (cantidad total de velocidad)

Momento lineal \equiv cantidad de movimiento \equiv cantidad de velocidad =

$$m \cdot \vec{V} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{V} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot [\vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z] = \vec{p}$$

Momento angular \equiv cantidad de movimiento angular \equiv cantidad de velocidad angular =



$$\vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge [m \cdot \vec{V}] = m \cdot [\vec{r} \wedge \vec{V}] = \sum_{i=1}^n m_i \cdot [\vec{r} \wedge \vec{V}] = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} = \vec{L}$$

El **MOMENTO ANGULAR** es una **cantidad vectorial** que **caracteriza** las **propiedades de inercia de un cuerpo**, que gira en relación con cierto punto (**O**). Se encuentra en las tres mecánicas (mecánica clásica, cuántica y relativista).

$$|\vec{L}| = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = \sqrt{(y \cdot v_z - z \cdot v_y)^2 + (x \cdot v_z - z \cdot v_x)^2 + (x \cdot v_y - y \cdot v_x)^2}$$

Cantidad de movimiento angular: $|\vec{L}| \equiv$ espín \equiv acción (escalar)



Energía $[ML^2T^{-2}] \times$ Tiempo $[T] =$ Acción $[ML^2T^{-1}]$

Momento lineal $[MLT^{-1}] \times$ Espacio $[L] =$ Acción $[ML^2T^{-1}]$

Momento Angular $[ML^2T^{-1}] =$ Acción $[ML^2T^{-1}]$

Significado de la "acción" = cantidad de **energía** \times **tiempo**



Curiosidades:

1. Cada ente o "partícula" microscópica posee una **acción** característica
2. Cuando la **acción** cambia, cambia la **naturaleza** de la "partícula"
3. En un proceso dinámico entre "partículas", la **acción** se conserva
4. La **unidad** de **acción** es **h (ó ħ)**

$h = 6,626 (1) \times 10^{-27} = 0.0000000000000000000000066261 \text{ erg} \cdot \text{seg}$

$\hbar = h/2\pi = 1,054 (6) \times 10^{-27} = 0.000000000000000000000010546 \text{ erg} \cdot \text{seg}$

Veremos:

1. La constante universal **h** de Planck
2. Su **aparición**
3. Su **naturaleza** y **significado**
4. Su **dependencia** y **magnitud**
5. Su **género**
6. Su **función** y **trascendencia**
7. Su **causa esencial**, y
8. Sus **consecuencias**



Hipótesis aceptada:

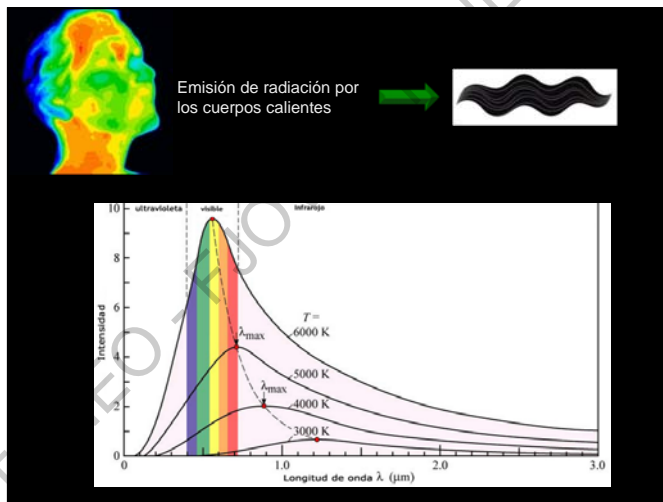
En cada cuerpo existe un **colectivo de osciladores con carga en equilibrio térmico**.

- Estos osciladores cargados **emiten** radiación electromagnética.
- La **densidad de energía radiada** es **proporcional** a una función que depende de la **energía media** de un **oscilador cargado típico**.
- Si la frecuencia de oscilación es **v**, se asume como válido el "**teorema de equipartición de la energía**":

Las moléculas en equilibrio térmico, tienen todas la misma **energía promedio**:

$$\frac{1}{2} k_B T$$

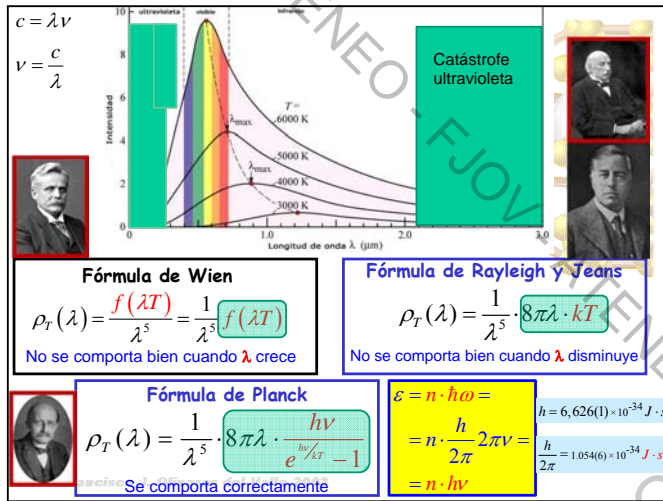
- Esta hipótesis de trabajo condujo a los científicos a proponer teorías en franca **contradicción con la experiencia**.
- Si el **teorema de equipartición** de la energía fuera válido los cuerpos emitirían continuamente energía (**catástrofe ultravioleta**).



Muchos fueron los que intentaron resolver el problema



- 1862 Kirchhoff (1824-1887)
- 1879 Stefan (1835-1893)
- 1896 Lummer (1860-1925)
- 1897 Pringsheim (1859-1917)
- 1898 Wien (1864-1928)
- 1898 Lord Rayleigh (1842-1919)
- 1899 James Jeans (1877-1946)
- 1900 Planck (1858-1947)



Max Planck eliminó la discrepancia postulando que **un oscilador sólo puede emitir o absorber determinadas energías** que son múltiplos enteros de una magnitud: " $nh \cdot \nu$ ", donde " h " es una nueva **constante universal**, " ν " la frecuencia del oscilador y " n " un número **entero**.

$\Delta\epsilon = n \cdot h\nu$

$6.626070150(69) \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{seg}$

ACCIÓN: Idénticas unidades que la cantidad de movimiento angular

Significado último de h

carga vibratoria

Círculo:
 $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$

Elipse:
 $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

a : Semieje mayor
 b : Semieje menor

Cuando a es igual a b , entonces se trata de una **circunferencia**
Área de la circunferencia: πa^2
Área de la elipse: $\pi a \cdot b$ (en el espacio fásico: acción)
Perímetro de la circunferencia: $2\pi a$
Perímetro de la elipse: $\pi(a+b)$

Hamiltoniana (energía total) de un oscilador elemental:

$E = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2} kx^2$

donde E es la energía total del oscilador, m su masa, y k es la constante de fuerza, con valor $4\pi^2\nu^2 m$:
 $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$

así $E = \frac{1}{2m} p_x^2 + 2\pi^2\nu^2 x^2 m$

o bien $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{p_x^2}{2mE}$

Ecuación de la elipse que describe el movimiento de la imagen del oscilador armónico en el espacio fásico $\{q,p\}$

$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{p_x^2}{b^2}$

carga vibratoria

Círculo:
 $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$

Elipse:
 $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

a : Semieje mayor
 b : Semieje menor

Semieje mayor, asociado a la coordenada fásica x :

$$a = \sqrt{\frac{E}{2\pi^2 v^2 m}}$$

Semieje menor, asociado a la coordenada fásica p_x :

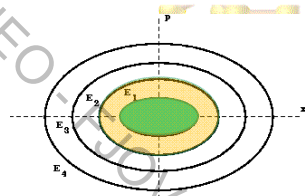
$$b = \sqrt{2mE}$$

El **área**, S , (**acción**) de la elipse que describe el comportamiento energético del oscilador será:

$$S = \pi \cdot a \cdot b = \pi \sqrt{\frac{E}{2\pi^2 v^2 m}} \cdot \sqrt{2mE} = \frac{E}{v} \rightarrow E = S \cdot v$$

Admitiendo que existe un **área elemental indivisible** en el espacio fásico (representada por h), es decir que $S = n \cdot h$, se llega a la **expresión** de Planck, asumida como postulado.

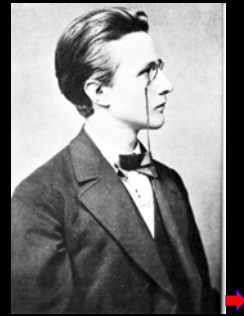
$$E = nh \cdot v \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



Prof. Francisco J. C.

El arrojó de Planck consistió en admitir que existe un **área elemental** indivisible en el espacio fásico (representada por h); es decir, que el **área de la figura que describe la imagen del oscilador en el espacio de las fases** sólo puede tener valores que sean múltiplos enteros de h y, por tanto, $S = nh$ con $n = 1, 2, 3, \dots$. Con ello, se llega fácilmente a la expresión $\epsilon = nhv$.

La **significación profunda** de la constante " h " hay que buscarla en la relación que ha obligado a introducir entre las **propiedades dinámicas de los sistemas materiales confinados e individuales** y su **comportamiento periódico**, vinculado a una naturaleza de tipo **colectivo**.



Naturaleza universal de h

- La constante h es una cantidad física **invariable** y **esencial** implicada en la descripción de **leyes de la naturaleza**.
- Conocemos **cinco** constantes "**universales**":
 - c : velocidad de la luz en el vacío: $\approx 3 \times 10^8$ m/s
 - G : constante de gravitación universal: $\approx 6.674 \times 10^{-11}$ m³kg⁻¹s⁻²
 - h : constante de Planck (unidad de **acción**): $\approx 6.626 \times 10^{-34}$ J·s
 - e : carga del electrón (unidad de **carga**): $\approx 1.602 \times 10^{-19}$ C
 - k_B : constante Boltzmann (unidad de **información**): $\approx 1.381 \times 10^{-23}$ J/K
- La **generalidad** de c , G , h , e y k_B es lo que nos hace decir que son **constantes universales**, pues aunque son magnitudes que podrían tomar un número **infinito** de valores, **siempre tienen el mismo valor, sea cual sea su contexto o teoría en la que aparecen implicadas**.
- Algunas de estas **constantes universales** podemos llamarlas también "**constantes físicas**", en tanto que suelen aparecer en expresiones matemáticas como **constantes de proporcionalidad**:

$$\epsilon = nhv = n \frac{h}{2\pi} 2\pi v = n h \omega$$

- El **significado físico** de h es **circunstancial** y su **valor numérico va siempre acompañado de su determinación dimensional (energía x tiempo, p x espacio)**, lo cual implica una relación directa e implícita con ciertas magnitudes físicas.
- Se dice que la **constante de Planck** vale $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s, con lo cual se concreta que tiene la dimensión de una **acción (energía durante un tiempo)**, pero con ello no se quiere decir que tal **acción** esté asociada a **una clase concreta de partícula** o entidad física, como ocurre en el caso de la constante c , por ejemplo, que designa la **velocidad de la luz**.
 - La **mecánica newtoniana** no contiene **ninguna constante**,
 - La **teoría newtoniana de la gravitación** contiene sólo G ,
 - La **mecánica cuántica** sólo h y
 - La **electrodinámica cuántica** sólo c , h y e .
- Ciertas constantes son típicas de la **macrofísica**, por ejemplo k_B y R (constante de los gases); otras lo son de la **microfísica**, como e y h , y otras sirven **para ambas**, como c y las constantes gravitacionales G (newtoniana) y X (einsteiniana).

10. La **acción** tiene una propiedad particularmente interesante que comparte, entre otras cosas, con la **entropía**: una **acción constante** es siempre absolutamente constante para cualquier observador, en el espacio y en el tiempo.
11. Lo anterior se traduce en que la **acción** es un **invariante tetradimensional** cuya pertinencia y significado pleno sólo puede encontrarse al considerarla en el **continuo espacio-tiempo**.
12. En la Mecánica Relativista, donde siempre se sustituye espacio por **espacio-tiempo**, una determinada "región" no debe tomarse como un simple volumen, sino como **volumen que dura un tiempo**.
13. La consecuencia es que, dada la densidad, una **pequeña región** en el nuevo sentido contiene no una pequeña masa simplemente, sino **una pequeña masa (energía) multiplicada por un pequeño tiempo**; es decir, **una pequeña cantidad de acción**.

14. La nueva fisonomía de la **acción** como producto de la **masa** (energía) por el **tiempo** nos lleva inmediatamente al significado profundo de aquella magnitud:

la **acción** está íntimamente ligada, **representa**, a la **curvatura del universo en el espacio-tiempo**, originada por la presencia de **masa**.
h es la **unidad elemental** de **acción**, es decir, de **curvatura**

15. No es posible dar una representación en forma de imagen para esta afirmación, dado que **nuestra noción de curvatura** deriva de la que presenta una superficie bidimensional en un espacio tridimensional, y esto da una idea bastante limitada acerca de la posible forma de **una superficie de cuatro dimensiones** en un espacio de cinco o más dimensiones.



16. En dos dimensiones hay sólo una curvatura total, y si ésta se anula, la superficie se vuelve plana o al menos puede ser desarrollada en un plano.
17. En **cuatro** dimensiones hay **varios coeficientes de curvatura**.
18. Estos coeficientes vienen expresados en la teoría de la **Relatividad General** mediante un **tensor G**, que representa a la curvatura espacio-temporal por excelencia y es un **invariante**.

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

19. Si **G** fuera igual a cero, la **curvatura se anularía** y el **espacio-tiempo sería plano, aún conteniendo masa**. No ocurre esto en la realidad, pues en un campo gravitacional material el **espacio-tiempo no es plano**.

20. Donde **existe materia**, existe **acción** y, por consiguiente, **curvatura**.
21. La **acción** es una de las dos magnitudes de la **Física pre-relativista** que sobreviven sin modificaciones en una descripción del universo absoluto. La otra magnitud es la **entropía**.
22. Ambas forman parte de dos grandes generalizaciones interdependientes: el **PRINCIPIO DE MÍNIMA ACCIÓN** y la segunda ley de la Termodinámica o **PRINCIPIO DE MÁXIMA ENTROPIA** (desorden).
23. De hecho, la **acción** puede identificarse con el **logaritmo, cambiado de signo**, de la **probabilidad estadística** de un estado existente en el universo, lo cual no es más que el reflejo de la identidad entre el **principio de mínima acción** y el de **máximo desorden (entropía)**:

$$nh \equiv -\ln \Omega$$



Magnitud de la constante h

- El valor numérico de h es extraordinariamente pequeño:

$$h = 6,626 (1) \times 10^{-34} = 0.0066261 \text{ J}\cdot\text{s}$$

El hecho de que esta ínfima constante haya originado convulsiones tan importantes en la Física ilustra claramente la audacia de la idea de Planck.

- Estableciendo una comparación grosera podríamos decir que la relación entre h y el número **1** es, aproximadamente, equivalente a la que existe entre la masa de **un grano de arena y el planeta Tierra**.
- Los saltos en los intercambios energéticos son, pues, sumamente minúsculos. A nuestra escala, el cuánto de **acción h** , a pesar de su omnipresencia, nos parece inexistente.
- Los fenómenos que observamos en nuestro mundo macroscópico ponen siempre en juego **una enorme cantidad de cuantos**. Todo ocurre como si los cambios energéticos se hicieran de una manera continua.

- Debido al pequeño valor de h , los acontecimientos individuales, con su aspecto discontinuo, cuántico, desaparecen, enmascarándose en el **aspecto continuo del fenómeno global**, estadístico, **el único accesible a nuestros sentidos**.
- Tal situación desaparece y la continuidad se quiebra cuando tratamos de estudiar sistemas y fenómenos microscópicos, en donde **h alcanza un valor significativo** en su **magnitud relativa**.
- Todo cambiaría si la velocidad c fuera **mucho mayor** y **h mucho más pequeña**. Las leyes de la naturaleza se volverían más simples, obedecerían perfectamente a las ecuaciones de *Newton*, de *Lagrange* y de *Hamilton-Jacobi*, y se acomodarían idealmente a las teorías de *Fresnel* (propagación de ondas) y de *Maxwell* (teoría electromagnética).
- Con una velocidad c luminosa que tendiera a un valor **infinito**, la **distancia** y la **duración** serían **invariantes con el referencial**; el espacio y el tiempo se convertirían en **absolutos**, y el reloj universal de *Newton*, indicando un tiempo valedero para todos los puntos del cosmos, sería una realidad.
- Si el valor de h fuera **más pequeño**, tendiendo a cero, la repartición de la energía se realizaría de un modo continuo y **la luz se propagaría en forma de ondas**. Además, las partículas elementales tendrían en cada instante un **lugar** y una **velocidad** exactamente **determinados**. ➔

El género de h

- No es la pequeñez lo que confiere a h su carácter excepcional, sino su **estructura íntima**, su dimensión física: **energía** (julios) multiplicada por **tiempo** (segundos).
- Estas dimensiones corresponden a una magnitud física llamada **acción**, que tiene una propiedad particularmente interesante que comparte, entre otras cosas, con la **entropía: una acción constante es siempre absolutamente constante para cualquier observador, en el espacio y en el tiempo**.
- Esto se traduce en que h es un **invariante tetradimensional** cuya pertinencia y significado pleno sólo puede encontrarse al considerarla en el continuo **espacio-tiempo**.
- En este sentido y de acuerdo con la teoría de la Relatividad Especial, **un suceso físico hay que considerarlo tanto en el espacio como en el tiempo**; el comportamiento de ambas dimensiones **dependerá de la velocidad del sistema y resulta relativo**; solamente su unión es real, absoluta.
- Así, casi todas las magnitudes fundamentales de la vieja Física **son secciones tridimensionales de la realidad** y, por ello, distintas para diferentes referenciales.

- Observadores que se muevan por el espacio a **diferentes velocidades** obtienen diferentes visiones de las cosas y, por ejemplo, estarán en desacuerdo en la longitud de un lápiz que midan al pasar.
- Pero el lápiz puede concebirse como un ente tetradimensional y, en su movimiento a través del tiempo, dibuja una **superficie tetradimensional**, un hiper-rectángulo, cuya **altura** es la longitud del lápiz y su **anchura es igual al tiempo transcurrido**.
- El **área** de dicho rectángulo se mide en unidades de **longitud×tiempo**, y este área resulta ser **la misma para todos los observadores** que la midan, incluso aunque ellos discrepen en cuanto a la longitud y al tiempo que están midiendo.
- Esta es la cualidad más trascendente de h : se trata de una constante universal, **propia del mundo espacio-temporal**.
- Por ser una **unidad constante de acción** es un **equivalente tetradimensional de la energía**, y resulta ser la misma para todos los observadores, aun cuando éstos no estén de acuerdo en la cantidad de energía y tiempo que componen tal acción.
- En la Relatividad Especial, existe una **ley de conservación de la acción** de igual importancia que la **ley de la conservación de la energía**. ➔

Función y trascendencia de h

1. A causa de la **naturaleza extraña** de h , su necesaria presencia en la formulación de la Física conduce a **conclusiones e interpretaciones** que rayan en la **paradoja** y la **contradicción**.
2. Podría decirse que una de las implicaciones más desconcertantes que introduce h es la de servir de **vínculo insólito con el que se identifican propiedades asociadas a entidades individuales y propiedades exclusivas de colectivos**. Un caso típico de esto es la expresión de De Broglie para los electrones o, en general, cualesquiera otra partícula elemental **con masa**:

$$h = \lambda \cdot p,$$

en donde h aparece como nexo entre una propiedad, λ , que sólo tiene significado en la descripción de una onda que se propaga en un medio material (constituido por muchas partículas) y otra, p o cantidad de movimiento, que es local y típica de las partículas individuales.

3. Según esta expresión, λ y p adquieren una condición de **complementariedad** tal que, para un sistema físico material, en todo momento, **el producto de ambas se mantiene constante** e igual a h ; de tal forma que, cuando el carácter corpuscular aumenta, disminuye el carácter ondulatorio, en la medida en la que su producto se mantiene constante e igual a h .

4. Nuevamente vemos la trascendencia que tiene el que h no sea igual a cero. Correspondientemente, para los **cuantones** elementales **portadores de masa**, podríamos construir una expresión equivalente para fenómenos tradicionalmente considerados con naturaleza ondulatoria, como la luz o la radiación electromagnética.
5. La dificultad en la interpretación surge cuando intentamos asociar el **concepto onda** (fenómeno distribuido de propagación de energía, no de masa, limitado por condiciones de contorno y con comportamiento periódico) al **concepto de partícula** (entidad local, homogénea e isotrópica, que se resiste al cambio de movimiento y que puede interactuar con sus análogas de forma atractiva o repulsiva).
6. En el primer caso, **la energía se propaga tridimensionalmente desde el foco emisor o fuente de la perturbación** y, en el segundo, **la energía propia (masa y potencial) y actual (cinética) se propagan de forma localizada** según una dirección determinada. →

Causa esencial de h

1. La causa de lo anterior proviene del hecho de que h crea una indisoluble **interdependencia entre el espacio-tiempo y los procesos dinámicos que se desarrollan en su seno**.
2. Esta conexión aparece impuesta a consecuencia de las dimensiones de h , en donde **se asocian siempre un par de magnitudes de diferente naturaleza**: la una de carácter **geométrico**, la otra de carácter **dinámico**; la una define la **configuración espacial**, la otra **el estado del movimiento** del sistema.
3. El acoplamiento de estas dos categorías de magnitudes, reunidas inseparablemente en h , entraña **la imposibilidad de determinar a la vez posición y velocidad de un cuantón en el espacio y en el tiempo**.
4. Esta fatal vinculación entre el **estado dinámico** de un cuantón y el **marco espacio-temporal** donde el cuantón evoluciona, se presenta como inevitable ley de la naturaleza, insospechada antes de descubrir h .

5. En la Mecánica clásica, la **densidad de materia** equivale a la masa dividida por el volumen.
6. Es decir, si se sabe la densidad de una pequeña parte, se puede descubrir la cantidad total de materia, multiplicando la densidad por el volumen que ocupa la pequeña parte.
7. En la Mecánica Relativista, donde siempre se sustituye espacio por espacio-tiempo, una determinada región ya no debe tomarse como un simple volumen, sino como **volumen que dura un tiempo**.



$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Consecuencias de que h no sea igual a cero

1. La **acción** (o lo que es lo mismo, nh) es una de las dos magnitudes de la Física pre-relativista que **sobreviven sin modificaciones** en una descripción del universo absoluto.
2. La otra magnitud es la **entropía**. Ambas forman parte de dos grandes generalizaciones interdependientes: el **principio de mínima acción** y la **segunda ley de la termodinámica** o **principio de máxima entropía** (máximo desorden).
3. Esta es la significación última de la teoría de **Weyl**: la constante h es una fracción pequeñísima de una unidad universal, de naturaleza absoluta, que puede representar la probabilidad de cualquier cosa, o una función de tal probabilidad.




El **principio de mínima acción**, también conocido como principio de acción estacionaria o principio de Hamilton, es un fundamento en mecánica clásica que establece que **la trayectoria que sigue un sistema físico entre dos estados se elige de tal manera que la acción es mínima o, más general, estacionaria**. Esto implica que la **naturaleza tiende a evolucionar** de una manera que minimiza **la cantidad de trabajo realizado o energía consumida**.

En mecánica estadística, el principio de máxima entropía establece que **la distribución de probabilidad menos sesgada que se le puede atribuir a un sistema estadístico es aquella en la que dadas unas ciertas condiciones fijas maximiza la entropía, S** , esto es, aquella en la que **la desinformación es máxima**.

4. De hecho, **la acción puede identificarse con el logaritmo, cambiado de signo, de la probabilidad estadística de un estado en el universo existente**, lo cual no es más que el reflejo de la identidad entre el **principio de mínima acción** y el de **máximo desorden**.
5. Finalmente, mencionar un aspecto relacionado con la **complementariedad** de las propiedades que, como individualidad y colectivo, presentan los objetos materiales. Se trata del **carácter dual** con el que se manifiestan los **cuantones** elementales, cuyo comportamiento colectivo está vinculado íntimamente con la curvatura del continuo **materia-espacio-tiempo** y materializado, formalmente, en términos de una **estadística, no clásica**, de composición de probabilidades.

FIN

Algunas definiciones para empezar

Circunferencia	$x^2 + y^2 = r^2$	Espacio cartesiano: x,y,z  3 coordenadas por partícula. Dimensión: $3N$ Cada punto: posición
Circunferencia	$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$	
Elipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Espacio configuracional: x,y,z,v_x,v_y,v_z  6 coordenadas por partícula. Dimensión: $3N+3N$
Esfera	$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$	
Esfera	$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1$	Espacio fásico: x,y,z,p_x,p_y,p_z  6 coordenadas por partícula. Dimensión: $3N+3N$ Cada punto: acción
Elipsoide	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	

Elementos de una circunferencia

Elementos de una elipse

Circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$

Circunferencia $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$

Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Algunas definiciones para empezar

Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Sfera $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1$

Elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Oblato, $a < b$

Prolato, $a > b$