

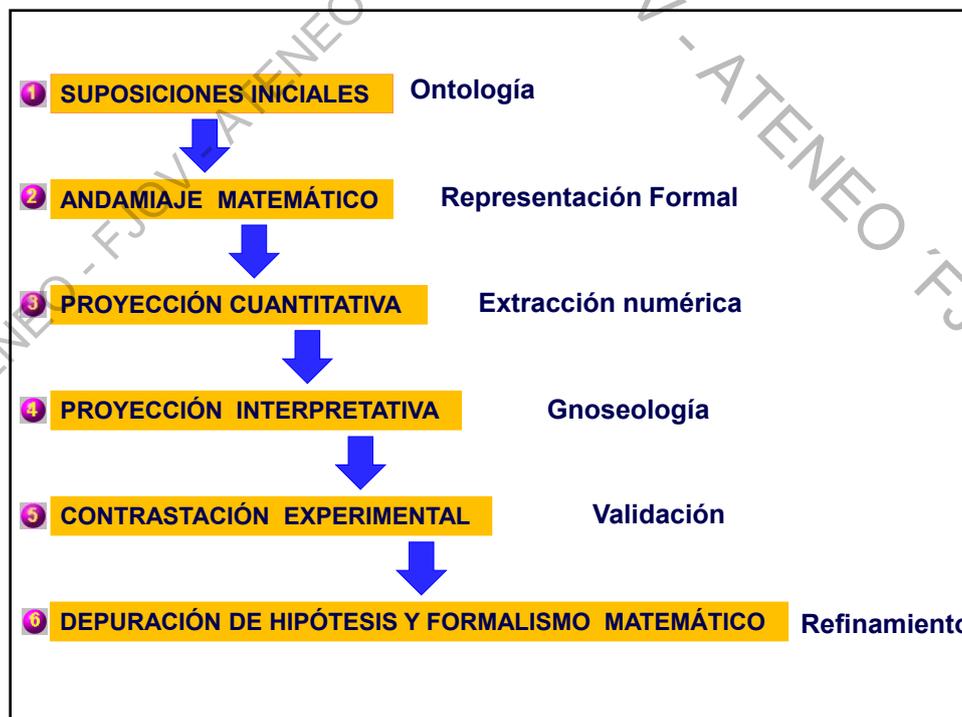
# Ciencia, Humanismo y Sociedad

## Seminarios sobre Ciencia

*Historias del quantum*  
*Entender la Física Cuántica*  
*Aspectos formales y conceptuales*

ATENEO de Badajoz

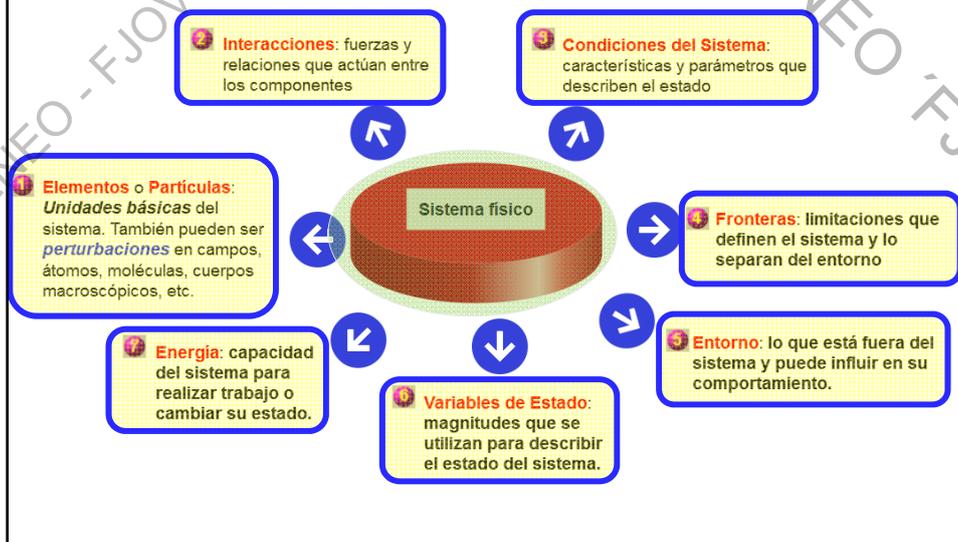
Francisco J. Olivares del Valle  
Viernes, 29 de Noviembre de 2024  
19:30 h



1

## SUPOSICIONES INICIALES

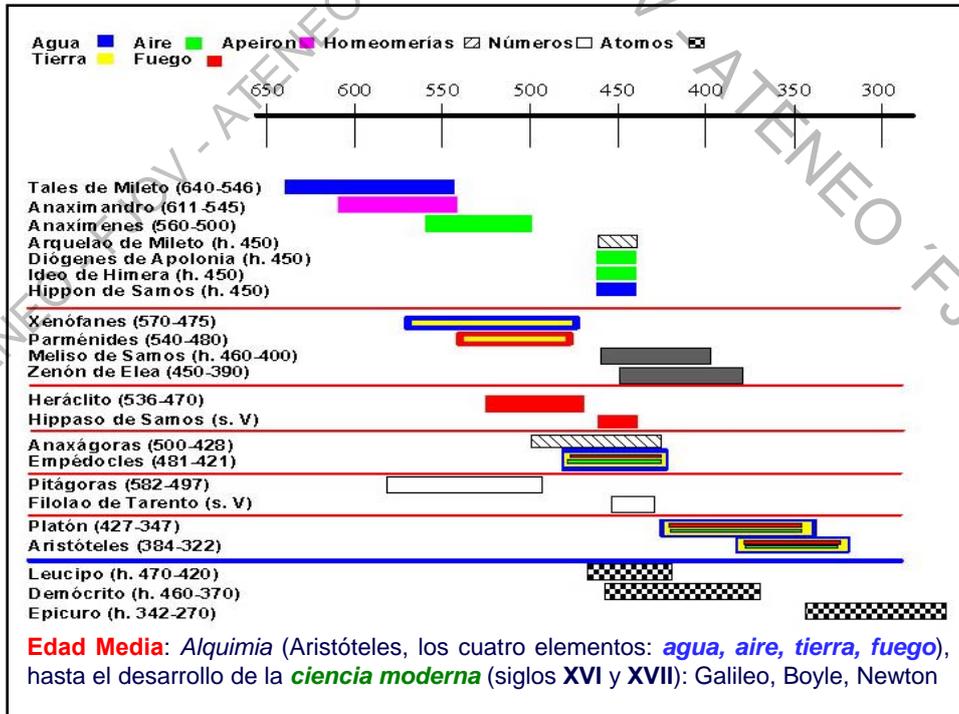
**TODO sistema físico real con masa persevera en su estado de *reposo* o *movimiento uniforme* en tanto no exista una *fuerza* (*influencia*) que lo haga desplazarse a lo largo de un *espacio*.**



**Energía** es la **capacidad de realizar un trabajo**, y hacer un trabajo significa **ejercer una fuerza** para mover algo, por lo que la **energía** es **LA CAPACIDAD DE MOVER COSAS, O BIEN, LA CAPACIDAD DE CAMBIAR COSAS FÍSICAMENTE.**

**TODO sistema físico real con masa CAMBIA** su estado de **reposo o movimiento uniforme** cuando existe una **fuerza** que actúa sobre él **durante un tiempo.**

REPRESENTACIÓN DE UN SISTEMA FÍSICO



Una **débil** corriente **atomista** (perdedores): griegos y romanos (**Lucrecio**), **Newton**, **Dalton**, **Robert Brown**, **Rutherford** y **Boltzmann**, con una **visión microscópica de la materia, dominada** por **PARTÍCULAS**.

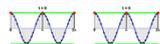


La Física Cuántica No Relativista (NRQP) de la **MATERIA**, que se desarrolló a mediados de la **década de 1920**, **SE EXPRESÓ EN LENGUAJE DE PARTÍCULAS**, y se denominó "**Mecánica Cuántica**" en analogía con la **Mecánica Newtoniana** de **partículas indestructibles, en el espacio vacío**.

### PARTÍCULA

Es una entidad **local, homogénea e isótropa**, que puede reducirse a un **punto ideal**, que **se resiste al cambio de movimiento** y que **interacciona por colisión o a distancia** con sus análogos de forma **atractiva o repulsiva**.  
**Concentración local de masa, carga y energía** (cinética y potencial, momento cinético intrínseco, etc.).

### CAMPO



Es un fenómeno **distribuido, extenso**, consistente en **una perturbación que se propaga en un medio material sin que éste altere su naturaleza o constitución** y **sin producir un desplazamiento** espacio-temporal relativo **de sus partes**.

**Fenómeno distribuido de propagación de una energía** (capacidad de realizar un trabajo: **cinética + potencial**), **la energía NO se concentra localmente**.



El concepto de **partícula** surge como la **idealización** de una cierta clase de **objetos reales**. Como todo concepto físico, el de partícula se construye por medio de un proceso de **abstracción** y **esencialización**, como resultado del cual **sólo se retienen ciertas propiedades características**.

Así, el concepto de partícula, como el que tenemos de una bola de billar, va asociado a una **generalización**, caracterizada por su **individualidad** y **número**; es decir, **pueden enumerarse diferenciadamente una a una**.

**Localidad, exclusión e indiscernibilidad.**

1. Una **partícula** es tan individual que no puede ocupar, simultáneamente, **dos puntos del espacio** separados a una **cierta distancia** (cuyo valor sobrepase su tamaño). La partícula es un ente **LOCAL** (con una **periferia** definida)
2. Además, **DOS partículas, sean indiscernibles o no**, no podrán ocupar nunca el **mismo lugar del espacio simultáneamente**. Son entes **EXCLUYENTES, no interpenetrables**.

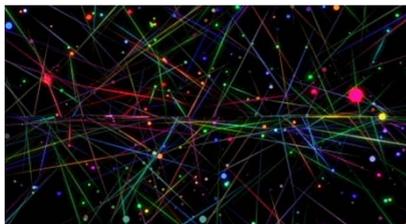
**Propiedades:** permiten **convenir** una **identidad intransferible**

**Propias (internas):** **forma, tamaño, composición, estructura, masa inercial, homogeneidad**, etc.

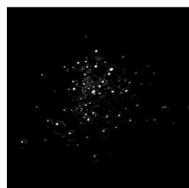
**Propias (externas):** **color, apariencia**, etc.

**Relacionales** (entre ellas y con el medio): **carga, masa gravitacional, posición, orientación**, etc.

**Espacio-temporales (dinámicas):** **velocidad, fuerzas, aceleración**, etc.



**Indistinguibles**



¿Son **dos** electrones partículas **indistinguibles**?



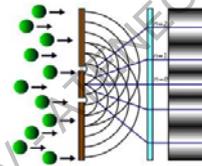
Después de **más de un siglo** de historia de la **Física Cuántica**, los físicos aún no han logrado llegar a un consenso sobre los principios o el significado de la teoría más **fundamental** y **precisa** de la ciencia.

Existe todavía una gran cantidad de **enigmas**:

- La dualidad onda-partícula,
- La medición y sus consecuencias,
- El entrelazamiento,
- La NO localidad,
- Las superposiciones,
- La indeterminación,
- El espín, su origen y significado físico,
- El origen de la carga, la masa y el magnetismo,
- El vacío cuántico,
- El significado de los estados cuánticos,
- La masa y la energía "oscurecidas",
- El fenómeno Túnel.



¡Quizás los complica!

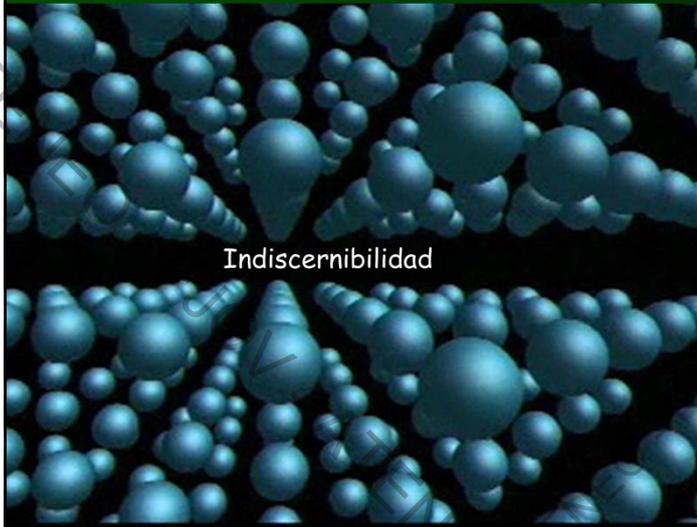


## Principios Básicos

1. Principio de Indiscernibilidad
2. Principio de Antisimetría
3. Principio de Complementariedad
4. Principio de Superposición
5. Principio de Indeterminación
6. Principio de Correspondencia

## Principios Básicos

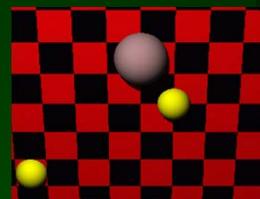
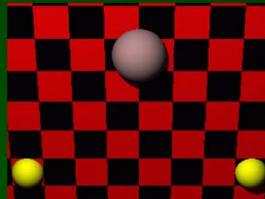
**1. Principio de Indiscernibilidad:** todas las entidades microscópicas (partículas) de igual naturaleza son indiscernibles.



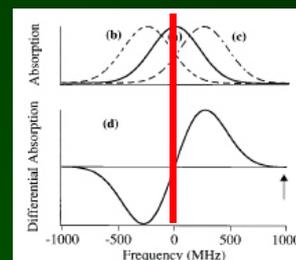
¿Son **dos** electrones partículas **indiscernibles**?



**2. Principio de Antisimetría:** dos entidades microscópicas portadoras de masa (*fermiones*) **no pueden coincidir** en la misma posición espacio-temporal y cuando permutan sus posiciones, el estado del sistema que constituyen **cambia de signo**.



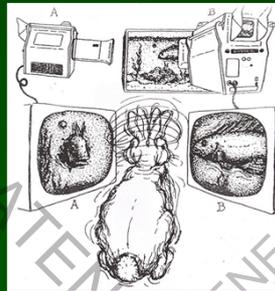
El **Principio de Antisimetría** establece que para partículas *indistinguibles*, al intercambiar las posiciones de dos cualesquiera de ellas, la función de estado  $\Psi$  debe ser **antisimétrica** (cambia el signo) para los *fermiones* y **simétrica** (invariable) para los *bosones*.



**3. Principio de Complementariedad:** las características de masa (corpúsculares) y de campo (ondulatorias) de las entidades microscópicas son **complementarias**.

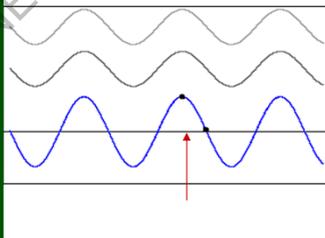
**Bohr, 1927:**

*No pueden utilizarse simultáneamente descripciones en términos de coordenadas espacio-temporales y descripciones en términos de transferencia de energía o momento (causales), ya que ambas requieren disposiciones experimentales **mútuamente excluyentes**.*

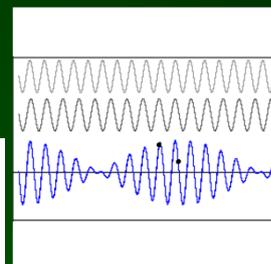
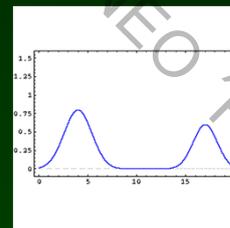
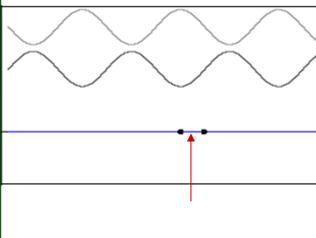


**4. Principio de Superposición:** el estado actual en el que se encuentra una entidad microscópica es una **combinación de todos los estados** posibles en los que puede encontrarse.

Dos ondas desfasadas, que producen una **onda superpuesta** con amplitud uniformemente variable



Superposición de dos ondas con dirección de propagación opuesta



Formación de una onda de grupos de ondas, por superposición de dos modos normales desfasados con igual frecuencia y amplitud

**5. Principio de Indeterminación:** las propiedades complementarias de las entidades microscópicas *no son medibles simultáneamente de forma exacta.*

**Heisenberg, 1927:**

El *producto de las imprecisiones* en la medición simultánea de *dos variables canónicamente conjugadas* ( $q$  y  $p$  ó  $t$  y  $E$ ) es una *constante* ( $\approx \hbar$ ), de modo que *cuando más precisa es la determinación de una de ellas, menor será la precisión con la que se conoce la otra, y recíprocamente.*

Los principios de *indeterminación* y *complementariedad* tienen profundas consecuencias sobre los aspectos ontológicos de la realidad física: *el estado de un sistema  $S$  depende no sólo de  $S$ , sino de la disposición experimental concreta en que nos encontremos.*

**6. Principio de Correspondencia:**

**Planck, 1906.** Las conclusiones de la Mecánica Cuántica convergen a los resultados previstos por la teoría clásica, al hacer  $h$  tender a  $0$ .

$$h = 0 \Rightarrow \lambda \cdot p = 0 \begin{cases} \lambda = 0 \rightarrow \nu = 0 \\ p = 0 \end{cases}$$

**Bohr, 1920:** la Mecánica Cuántica debe contener a la Clásica como caso límite (Bohr).

Lo mismo sucede si  $h$  se mantiene constante, pero la frecuencia  $\nu$  tiende a  $0$ .

## POSTULADOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

### Los cuatro pilares de la Mecánica Cuántica

#### POSTULADOS

1	<p>La <b>información</b> que tenemos sobre un sistema físico viene descrita por un objeto matemático que llamamos <b>función de onda</b></p> <p>Podemos <b>predecir</b>, por ejemplo, lo que <b>hará</b> un electrón, pero no lo que <b>es</b> un electrón en su esencia más íntima. Tampoco sabremos <b>por qué</b> existe un electrón. Solo sabremos <b>manipular la información que lo describe</b>.</p>	<p>INFORMACIÓN</p> <p><math>\Psi(x,t)</math></p>
2	<p>Sólo podemos <b>conocer</b> ciertas propiedades de un <b>sistema</b></p> <p>Las <b>propiedades observables</b> se corresponden matemáticamente con <b>operadores</b> que actúan sobre la función de onda</p>	<p>CONOCIMIENTO</p> <p><math>\hat{O}</math></p>
3	<p>El <b>resultado</b> de una medida es <b>aleatorio</b></p> <p>Solo <b>tenemos acceso</b> al conocimiento mediante probabilidades y tras realizar una medida, la <b>función de onda colapsa al estado medido</b></p>	<p>OBSERVACIÓN</p> <p><math>\hat{O}\Psi(x,t)</math></p>
4	<p>Entre <b>dos medidas</b>, la función de onda <b>cambia según la ecuación de Schrödinger</b></p> <p>En el mundo cuántico <b>la información evoluciona</b> de forma <b>determinista</b> y <b>preservando la estructura de probabilidades</b> que subyace en ella. La evolución de la información no tiene azar.</p>	<p>CAMBIO</p> <p><math>H \Psi(x,t) = E \Psi(x,t)</math></p>

**1**

Representando a un **sistema físico** y conteniendo **TODA la información** posible acerca de él, **existe** una función matemática  $\Psi$  que depende de las **coordenadas espacio-temporales** y es **conforme** con las propiedades límite del sistema

**POSTULADOS**

**2**

Existe un **operador** (procedimiento matemático)  $\hat{A}$  que permite extraer el observable clásico **a** (posición, momento lineal, momento angular, energía, etc.) trabajando sobre la función  $\Psi$

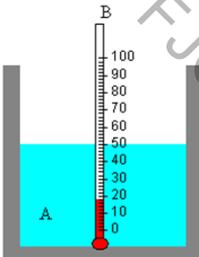
**3**

Cuando al extraer el valor **a** de la función  $\Psi$  con el operador  $\hat{A}$ , el resultado deja la función  $\Psi$  tal y como estaba, se dice que **a** es un **valor propio** y que  $\Psi$  es una **función propia**

$\hat{H}\Psi = E\Psi$

**4**

Las soluciones  $\Psi_n$  de la ecuación de Schrödinger (de valores propios) forman un conjunto completo




**2**

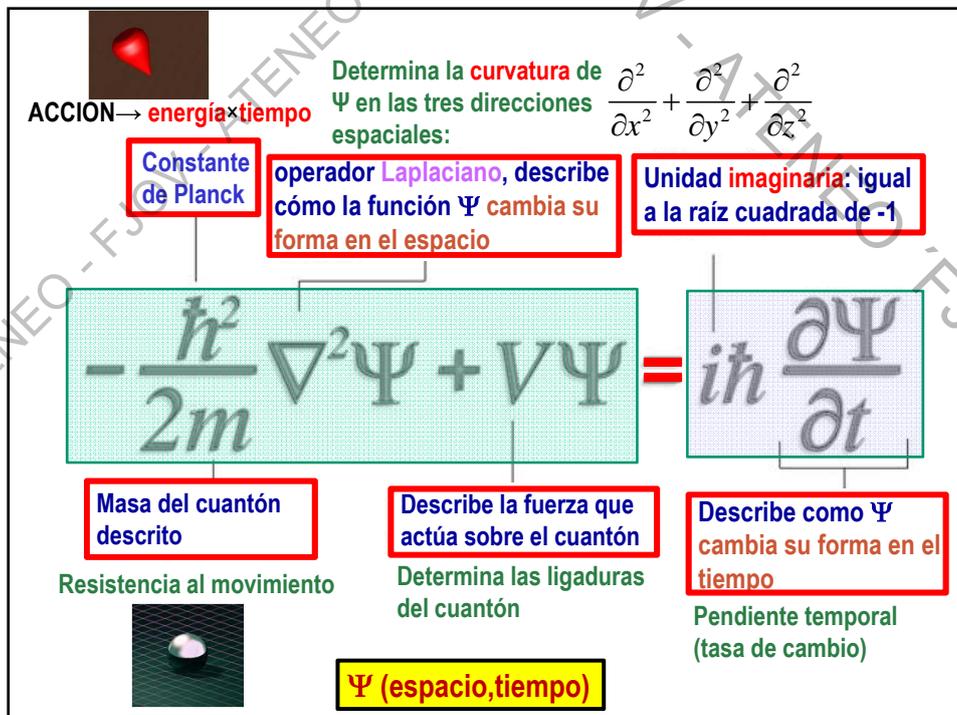
**ANDAMIAJE MATEMÁTICO**

La ecuación central de la FC de la materia, **la ecuación de Schrödinger, es una ECUACIÓN DIFERENCIAL PROPIA DE CAMPO.** En lugar de una receta obvia para el **movimiento de partículas**, parece describir **UN CAMPO** dependiente del tiempo,  $\Psi(x,y,z,t)$  a lo largo de una región espacial:

$$\hat{H} \Psi \rightarrow E \Psi$$

$$\hat{H} = \hat{E}_{\text{cin}} + \hat{E}_{\text{pot}} + \hat{E}_{\text{otras}}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$



Sin embargo, este **campo** adoptó una **interpretación particulada** cuando **Max Born** propuso que " $\Psi(x,y,z,t)$  es la **amplitud de probabilidad** de que, tras una medición en el tiempo  $t$ , la partícula presunta **"se encuentre"** en el punto  $(x,y,z)$ ".

$$|\Psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz dt$$

$$|\Psi|^2 d\tau$$



**Otra sugerencia**, que también está de acuerdo con la **interpretación de Copenhague**, pero es menos confirmatoria, sería que " $\Psi(x,y,z,t)$  es la **amplitud de probabilidad** de que, tras una medición en el tiempo  $t$ , **"ocurra una interacción"** en el punto  $(x,y,z)$ ".

Esto preserva la regla de **Born**, al tiempo que **permite una interpretación de campo o de partícula**.

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

Independiente del tiempo:

$\Psi(x)$

$$\hat{H}$$

$$\Psi(x) = E\Psi(x)$$

Dependiente del tiempo:

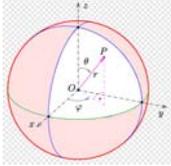
$\Psi(x,t)$

$$\hat{H}$$

$$\Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t)$$

1. Para un solo cuantón
2. Ecuación diferencial típica: **lineal, homogénea y con coeff. const.**
3. Se buscan las soluciones  $\Psi(x)$  y  $E$
4. Si la función depende de **más de una variable**, y éstas son **separables**, hay que resolver tantas ecuaciones como variables intervienen (soluciones exactas). Si **no son separables** hay que emplear **métodos aproximados** (soluciones aproximadas). Más de una partícula.
5. En las soluciones aparece la unidad imaginaria  $i = \sqrt{-1}$
6. Una vez obtenida la expresión analítica de  $\Psi$  hay que imponer las condiciones de contorno, entonces aparecen los **números cuánticos**, uno por cada variable.
7. Significado de las derivadas 1ª y 2ª al ser aplicadas a la función  $\Psi$

**Soluciones de la ecuación de campo (Schrödinger: átomo de hidrógeno):**



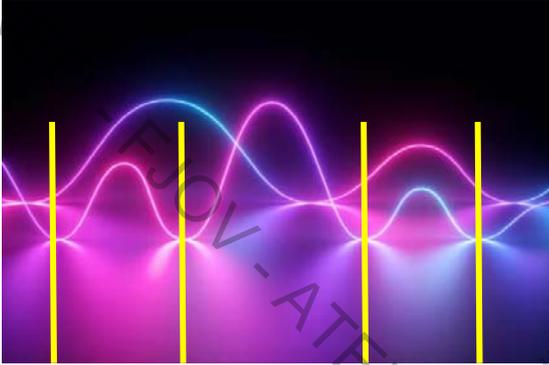
$$\Psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) \cdot Y_l^m(\theta, \phi) \equiv A_{nlm} \cdot Pol(r) \cdot e^{-i(kr - |m|\omega t)}$$

Constante (Amplitud)  $\rightarrow A_{nlm}$   
 Ondulación  $\rightarrow Pol(r)$   
 Pulsación  $\rightarrow e^{-i(kr - |m|\omega t)}$

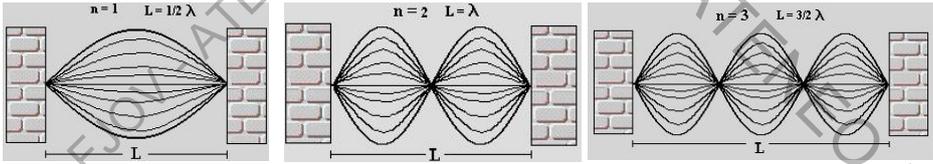
Familia **infinita** de funciones **complejas**, **continuas**, **espacio-temporales**, **exponenciales** (seno, coseno, seno  $\pm$  coseno), **aceptables**, **cuadrado positivo real**, que cumplen las **condiciones de contorno**.

La **obligación** de satisfacer las **condiciones de contorno** es el origen de los **números cuánticos** que caracterizan cada estado y su energía.

Estados **superpuestos** también son solución de la ecuación:

$$\Psi \equiv \sum_0^{\infty} c_i \Psi_i$$


Si la onda está **confinada** y no hay disipación de energía (**conservativo**), las **ondas son estacionarias** (modos normales):

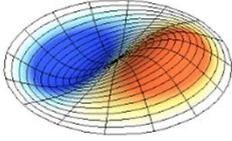
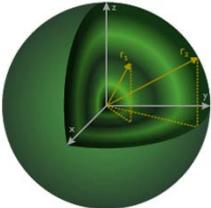


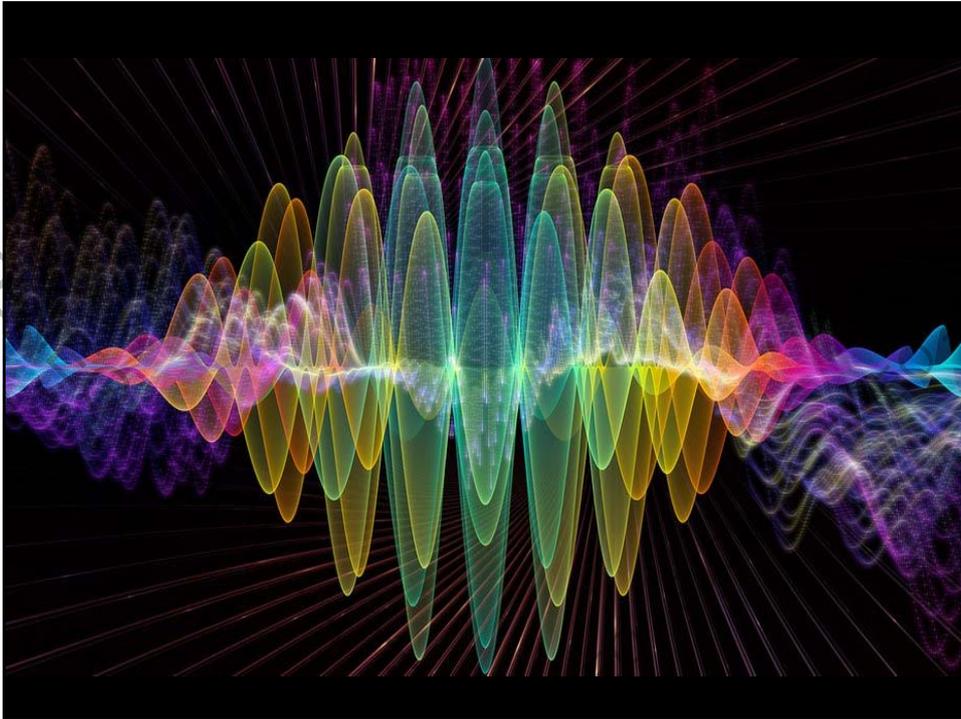
La **AMPLITUD** es constante, los nodos no varían de posición y siempre se cumple que  $n \cdot \frac{1}{2} \lambda = L$  (con  $n=1, 2, 3, 4, \dots$ )

$L$  es la longitud del **espacio** en el que se propaga la onda,  $\lambda$  es la longitud de onda y  $n$  un **NÚMERO ENTERO** (1, 2, 3...) ó **NÚMERO CUÁNTICO**.

Así, en estas condiciones, **sólo son posibles determinados valores para la longitud de onda  $\lambda$** .

**SÓLO PUEDEN PROPAGARSE DETERMINADOS VALORES DE ENERGÍA.**



Si abandonamos el concepto de **partícula** y retomamos el concepto de **campo**, la mayor parte de los enigmas que hasta hoy hemos tenido a la hora de interpretar los resultados de la **Física Cuántica** desaparecen, así que los fenómenos cuánticos aún no suficientemente explicados, como:

- La dualidad onda-partícula,**
- La medición y sus consecuencias,**
- El entrelazamiento,**
- La NO localidad,**
- Las superposiciones,**
- La indeterminación,**
- El espín, su origen y significado físico,**
- El origen de la carga, la masa y el magnetismo,**
- El vacío cuántico,**
- El significado de los estados cuánticos,**
- La masa y la energía "oscureas",**
- El fenómeno Túnel.**

***pueden recibir una más fácil y lógica interpretación.***



## PROYECCIÓN CUANTITATIVA

### Algoritmo Genérico para **trabajar** en Mecánica Cuántica

La Mecánica Cuántica es una disciplina **compleja** y, aunque no existe un "**algoritmo genérico**" **único** que pueda aplicarse a todos los problemas, sí hay una **SERIE BÁSICA DE ETAPAS** que se pueden seguir para tratar problemas en este ámbito.

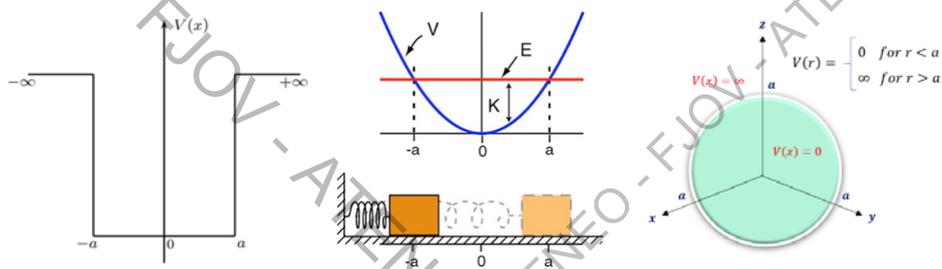


#### Definición del **Sistema Cuántico** en estudio

- **Identificación del Sistema.** Hay que **determinar con precisión** cuál es el **sistema físico** que se pretende estudiar (p.e., *electrones* en un átomo, *cuantones* encerrados en un pozo de potencial, etc.).
- **Partículas y grados de libertad.** Hay que **identificar inequívocamente** el **número de partículas** y **sus respectivos grados de libertad** (espaciales, tiempo, momento, espín, etc.).

## 2 Elección del Potencial (fuerzas sobre el sistema)

- **Modelo de Potencial.** Hay que elegir un modelo para el potencial  $V(\mathbf{r})$  que **actúa sobre TODAS las partículas**. Puede ser un **potencial simple** como en el **pozo cuadrado**, un **potencial armónico** como en el **oscilador**, un **potencial central coulombiano** como en el **átomo**, etc.
- **Condiciones de frontera.** Hay que **definir** las **condiciones de contorno** o **condiciones límite** relevantes (*por ejemplo, condiciones de contorno en un pozo de potencial infinito*).



## 3 Construcción de la ecuación de Schrödinger

- **Ecuación dependiente del tiempo.**

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r})\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

- **Ecuación independiente del tiempo.**

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r})$$

**Parte cinética.** Contenido en energía, procedente del **movimiento** electrónico

**Parte potencial.** Contenido en energía, procedente de la **posición** del electrón

$$-\frac{\hbar^2}{2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \right] \Psi(\vec{r}_i) \right) + V(\vec{r}_i)\Psi(\vec{r}_i) = E\Psi(\vec{r}_i)$$

#### 4 Resolución de la ecuación de Schrödinger

- **Método Analítico.**

- Separación de Variables.** Si es posible, se separan las variables para resolver la ecuación de forma exacta.
- Métodos aproximados.** Pueden usarse métodos específicos y adecuados para el potencial elegido (por ejemplo, métodos **variacional** y/o **perturbacional**).

- **Método Numérico.**

Si no es posible una solución **analítica**, se usan métodos numéricos como:

**Diferencias finitas**

**Método de elementos finitos**

**Método de la matriz de discretización**

**Métodos de Monte Carlo**

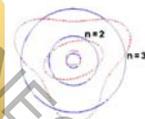
- **Software (programas de ordenador).**

Puede considerarse usar **software de simulación** como **MATHEMATICA**, **MATLAB**, **Python** (SciPy), o **programas** de ordenador especializados en **Mecánica Cuántica**.

#### 5 Normalización de la Función de Onda

Hay que asegurarse de que la función de onda  $\Psi$  está **normalizada** y es **aceptable**, cumpliendo con las **condiciones de contorno** o frontera, **continuidad**, **finitud**, **integrabilidad**, etc.

$$n\lambda = 2\pi r$$



#### 6 Obtención de Propiedades Físicas

A continuación, utilizando la **función de onda**, se pueden calcular los **valores esperados** o **promedio** de los **observables relevantes**, como posición, momentos, energía, etc. Cálculo de **probabilidades** para diferentes estados o intervalos.

#### 7 Análisis de Resultados

**Interpretación Física.** Se analizan los resultados obtenidos en el contexto físico del problema, comparando con resultados experimentales si es aplicable.

**Consistencia.** Se verifica la consistencia de las soluciones con principios fundamentales de la Mecánica Cuántica, como el principio de Indeterminación de Heisenberg.



## Estudio de **Estados Estacionarios y Dinámicos**

**Estados Estacionarios.** Estudio de los estados de energía y sus funciones de onda asociadas.

**Evolución Temporal.** Para sistemas que evolucionan en el tiempo, se estudia cómo cambia la función de onda con el tiempo. Solución general de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo.



## Extensión a sistemas más complejos

Si se desea estudiar sistemas más complejos, como múltiples partículas o sistemas interactuantes, considérense:

**Teoría de Perturbaciones.** Para introducir interacciones **pequeñas**.

**Teoría de Variaciones.** Para sistemas con múltiples **configuraciones**.

**Funcionales de la Densidad,** Para sistemas de muchos cuerpos.

**Métodos de Monte Carlo.** Para sistemas en equilibrio térmico o cuántico. **Dinámica Estocástica.**

**Métodos de Dinámica molecular.** Para sistemas en equilibrio térmico o cuántico. **Dinámica clásica.**

## Documentación y revisión de resultados

**Registro de métodos y resultados.** Documentar todos los métodos utilizados y los resultados obtenidos de manera clara y ordenada.

**Revisión por Pares.** Si es posible, sométase el trabajo a revisión por colegas o expertos en el área para obtener retroalimentación.

## Conclusión

El algoritmo expuesto proporciona un **marco general** para trabajar con problemas en Mecánica Cuántica.

Los pasos pueden variar en función de la **complejidad del sistema** y de las **técnicas disponibles**.

Es importante tener en cuenta que la Mecánica Cuántica es un **campo en constante desarrollo**, y muchas técnicas y métodos avanzados se han desarrollado a lo largo de los años para abordar problemas cada vez más complejos.



## PROYECCIÓN INTERPRETATIVA

### Algoritmo Genérico para la proyección interpretativa

Interpretar los resultados en Mecánica Cuántica es un proceso fundamental que requiere un enfoque sistemático para comprender las **implicaciones físicas** de las soluciones.

A continuación, se presenta el algoritmo detallado y estructurado que se puede seguir para **interpretar los resultados** obtenidos en Mecánica Cuántica.



#### Revisión de los resultados obtenidos

**Funciones de Onda.** Examinar las funciones de onda obtenidas ( $\Psi$ ) y sus formas, considerando si cumplen con la **condición de normalización** y las **condiciones de contorno**:

$$\int_0^{\infty} |\Psi(\vec{r})|^2 d\vec{r} = 1$$

**Energías.** Revisar los valores de energía calculados (E), si son **discretos** (cuantizados) o **continuos**.

La **normalización de  $\Psi$**  es esencial para garantizar que pueda ser **interpretada como densidad de probabilidad**. Asegura que **la probabilidad total de encontrar una partícula en algún lugar del espacio sea igual a 1**.

## 2 Cálculo de Probabilidades

**Distribución de Probabilidad.** Calcúlese la **densidad de probabilidad** de encontrar la partícula en una posición determinada:

$$P(\vec{r}) = |\Psi(\vec{r})|^2$$

**Probabilidades de Estados.** Determinése las probabilidades de encontrar la partícula en diferentes estados cuánticos, si corresponde:

$$P(n) = |\langle \Psi_n \rangle|^2$$

**Interpretación.** Interpretese estas probabilidades en términos de *experimentación física*, como la probabilidad de detección en un detector.

## 3 Cálculo de valores esperados

**Valores esperados de observables.** Calcúlese los valores esperados de los observables relevantes, utilizando la función de onda:

$$\langle \hat{A} \rangle = \int \Psi^*(\vec{r}) \hat{A} \Psi(\vec{r}) d\vec{r}$$

**Ejemplos de Observables.** Esto puede incluir la posición  $x$ , el momento  $p$ , y/o la energía  $H$ .

**Interpretación física.** Analícese cómo estos **valores esperados** se relacionan con las expectativas en un experimento real.

## 4 Estudio de Estados Cuánticos

**Clasificación de Estados.** Clasifíquense los estados obtenidos (por ejemplo, estados ligados, estados continuos, estados de electrones en átomos).

**Superposición de Estados.** Si la función de onda se puede expresar como una superposición de estados base, discútese el significado de esta superposición.

**Entrelazamiento.** En sistemas de múltiples partículas, determinése si hay **entrelazamiento** entre las partículas y discútese sus implicaciones.

### 5 Análisis de la evolución temporal

**Evolución Temporal de la Función de Onda.** Examínese cómo la función de onda **evoluciona con el tiempo**, a partir de la solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_n c_n \Psi_n(\vec{r}) \cdot e^{\frac{-iE_n t}{\hbar}}$$

**Interferencia Cuántica.** Analícese cualquier efecto de interferencia que pueda surgir de la evolución temporal de los estados cuánticos.

### 6 Comparación con resultados experimentales

**Correlación con datos experimentales.** Compárense los resultados teóricos con datos experimentales disponibles. Esto puede incluir **espectros atómicos**, **medidas de energía**, o **distribuciones de probabilidad**.

**Discusión de desviaciones.** Si hay discrepancias, discútanse posibles razones (p. ej., **aproximaciones**, **efectos no considerados**, **interacciones externas**).

### 7 Consistencia con Principios de la Mecánica Cuántica

**Principio de Indeterminación.** Verificar cómo los resultados se relacionan con el principio de indeterminación de Heisenberg:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

**Conservación de la Probabilidad.** Asegurémonos de que se cumpla la conservación de la probabilidad a lo largo del tiempo, lo que implica que la **integral de probabilidad** sea constante.

### 8 Interpretación filosófica y conceptual

**Interpretaciones de la Mecánica Cuántica.** Reflexionemos sobre la interpretación que corresponde a nuestros resultados (por ejemplo, **interpretación de Copenhague**, **interpretación de muchos mundos**, etc.).

**Implicaciones físicas.** Discútanse las implicaciones físicas más amplias de los resultados, como la **naturaleza de la realidad cuántica** y el **papel del observador**.

### Consideraciones Finales

**Limitaciones del Modelo.** Reconozcamos las limitaciones del modelo utilizado y cómo podrían afectar la interpretación de los resultados.

**Perspectivas Futuras.** Propongamos posibles experimentos futuros o extensiones del estudio basado en los resultados observados.

### Documentación y Comunicación

**Registro Detallado.** Manténgase un registro detallado de todos los resultados, cálculos y análisis realizados.

**Presentación de Resultados.** Comuníquese adecuadamente con la comunidad científica, presentando los hallazgos de manera clara y precisa.

5

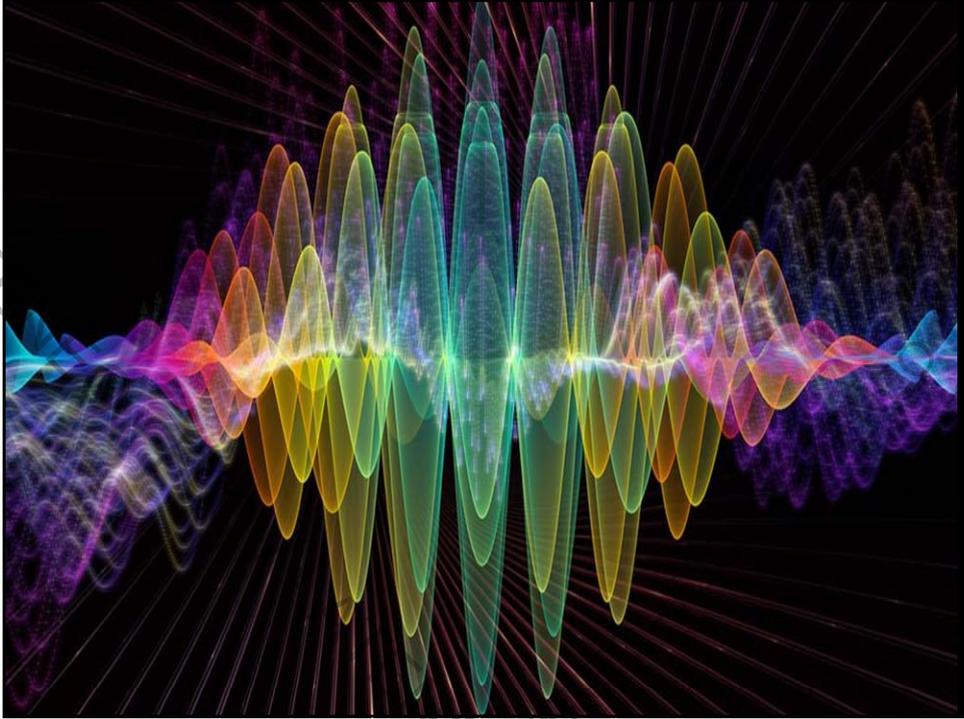
## CONTRASTACIÓN EXPERIENCIAL

Validación

6

## DEPURACIÓN DE HIPÓTESIS Y FORMALISMO MATEMÁTICO

Refinamiento



**FIN**